Tentamen Dynamische Systemen, 17/apr/2008

- Schrijf op ieder vel je naam en het aantal vellen dat je inlevert.
- Laat steeds duidelijk zien hoe je aan het antwoord gekomen bent.
- Er zijn drie opgaven. Succes!

Opgave 1 Beschouw een gladde functie $V : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ en daarbij de tweede orde differentiaalvergelijking

$$x'' = -\frac{dV}{dx}(x). \tag{1}$$

Schrijf deze bewegingsvergelijking als een dynamisch systeem met als toestandsruimte het (x, y)-fasevlak, waarbij $y = x'$.

a) Definieer $H(x, y) = \frac{1}{2}y^2 + V(x)$ en laat zien dat H een behouden grootheid is, d.w.z., dat langs elke evolutie $\{(x(t), y(t)) \mid t \geq 0\}$ van het dynamisch systeem geldt dat $H' \equiv 0$.

b) Toon aan dat bovenstaand dynamisch systeem geen attractoren kan hebben.

benadering potent. afh. v afstand,

c) Omschrijf voor $V_1(x) = x^3 - x^2$ and $V_2(x) = x^4 - x^2$ het typische gedrag van het bijbehorende dynamische systeem. Schets de bijbehorende faseportretten.

d) Hoe verandert dit als we vergelijking (1) veranderen tot

$$x'' = -\frac{dV}{dx}(x) - cx', \tag{2}$$

voor een constante $c > 0$? Schets opnieuw de bijbehorende faseportretten.

e) Laat zien dat vergelijking (2) geen periodieke evoluties kan hebben als $c > 0$.

Opgave 2 Op de 2-torus $\mathbb{T}^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ beschouwen we coordinaten (x_1, x_2) modulo $\mathbb{Z}$. Voor een vector $\Omega = (\omega_1, \omega_2)$ beschouwen we het stelsel differentiaalvergelijkingen

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \omega_1 \\ \dot{x}_2 &= \omega_2, \end{aligned} \tag{3}$$

$\dot{x} = \omega\Omega$

x y

waarbij we Ω de *frequentie-vector* noemen. Laat A een 2×2-matrix zijn met gehele coefficienten en met $\det A = 1$; je mag aannemen dat A een diffeomorfisme $\varphi : \mathbb{T}^2 \to \mathbb{T}^2$ definieert. Beschouw het via φ uit (3) getransformeerde stelsel differentiaalvergelijkingen. Toon aan dat dit dezelfde vorm heeft als (3), maar nu met frequentie-vector $A\Omega$.

$\cancel{\dot{y} = A\Omega}$

$\cancel{\dot{y} = A\dot{x}}$

$Ax = \cancel{A}y$

$\dot{x} = A^{-1}\dot{y}$

$A\omega_1 = y$

Opgave 3 We beschouwen de afbeelding $f : [0,1] \to [0,1]$, gedefinieerd door

$$f(x) = \begin{cases} 3x, & x \in [0, \frac{1}{3}) \\ 3x - 1, & x \in [\frac{1}{3}, \frac{2}{3}) \\ 3x - 2, & x \in [\frac{2}{3}, 1). \end{cases}$$

a) Schets de grafieken van f en f^2 (de twee keer geïtereerde).

b) Ontwerp een symbolische dynamica voor f. (Aanwijzing: maak gebruik van het drie-tallig stelsel en bekijk de ruimte van symboolrijen met de symbolen 0, 1 en 2.)

c) Hoe volgt hieruit dat er periodieke punten van f zijn en dichte banen?

d) Gegeven een dichte baan $\mathcal{O}^+(x) = \{f^n(x) | n \geq 0\}$, toon dan de dispersie-exponent E van deze baan de waarde $\ln 3$ heeft.

e) De afbeelding f als boven lijkt in zekere zin op de bekende verdubbelings afbeelding $g : [0,1] \to [0,1]$, gedefinieerd door

$$g(x) = \begin{cases} 2x, & x \in [0, \frac{1}{2}) \\ 2x - 1, & x \in [\frac{1}{2}, 1). \end{cases}$$

Toon aan dat er desondanks geen homeomorfisme kan bestaan dat f en g conjugeert.